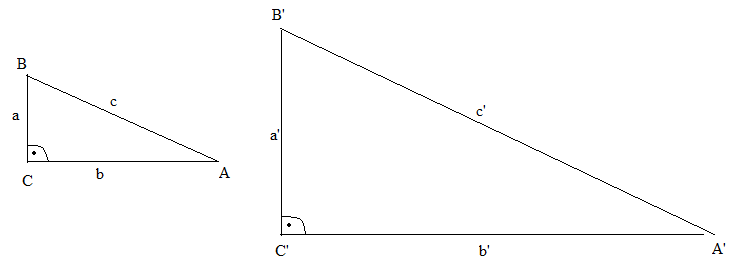
A trigonometria bevezetése okleveles KisMókusoknak:

Vegyünk fel egy derékszögű háromszöget, amelynél az elrendezéssel és jelöléssel legyenek a következő megállapodások:

a derékszög (általában gamma betűjelű) legyen bal oldalon, amely csúcshoz rendeljük a C betűjelet, így vele szemközt kerül a háromszög leghosszabb oldala, az átfogó, amelynek betűjele: c. Az átfogó végpontjai legyenek A és B mégpedig úgy, hogy C-től jobbra A és C felett B betűjelű csúcsok. Ebben az elrendezésben az A csúcsnál lévő szög alfa, a vele szemközti oldalra pedig hivatkozhatunk függőleges befogóként. B csúcsnál lévő szög béta, a vele szemközti oldalra hivatkozhatunk vízszintes befogóként. Ugyanez az elrendezés található a fgv-táblázat 45.oldalán.



Az eredeti háromszögünk oldalai pedig legyenek: függőleges befogó a=6cm; a vízszintes befogó b=8cm és az átfogó c=10cm. Végezzük el ezen háromszögön a arányú (nagyítás) középpontos hasonlósági transzformációt a C derékszögű csúcsra vonatkozóan, ekkor az képháromszög oldalai a’=15cm, b’=20cm és c’=25cm. A középpontos hasonlósági transzformáció származtatásának elve értelmében, az egymásnak megfeleltethető oldalak aránya mindig állandó, vagyis a két háromszög hasonló. Az egymásnak megfeleltethető oldalak hányadosainak állandóságából következő hasonlóságot ezután átvisszük a hasonlóság egy másik alaplehetőségére, mégpedig a szögek állandóságára, hiszen a középpontos hasonlóság (kicsinyítés, nagyítás) elvégzése után a szögek változatlanok.

Soroljuk fel az eredeti és a képháromszög valamely két oldalának hányadosát az összes lehetséges módon:

Azt tapasztaljuk, hogy a hányadosok értékei rendre megegyeznek. Mivel kicsinyítés és nagyításkor csak az oldalhosszak változnak a szögek nem, így ezekből az állandó értékekből következtetnünk kell tudni a derékszögű háromszög szögeire. Ezeket a kapcsolatokat nevezzük a derékszögű háromszög hegyesszögének szögfüggvényeinek. A képezhető 6 hányados közül középiskolában 4et tanulmányozunk. Ekkor a vízszintes befogó jobb oldali, tehát A csúcsánál lévő alfa szöghöz viszonyítva a derékszögű háromszög befogóira a következőképp kell hivatkozhatunk:

a függőleges befogóra (a oldal) a szöghöz viszonyított szemközti befogó;

a vízszintes befogóra (b oldal) a szöghöz viszonyított melletti befogó.

A függőleges befogó C feletti B csúcsnál lévő béta szög esetén a háromszög oldalaira a következő hivatkozások érvényesek:

a függőleges befogóra (a oldal) a szöghöz viszonyított melletti befogó;

a vízszintes befogóra (b oldal) a szöghöz viszonyított szemközti befogó.

Most vegyük alapul a vízszintes oldal végpontjában lévő alfa hegyesszöget, ekkor a 4 nevezetes oldalarány származtatásai, elnevezései és jelölései a következőképp alakulnak:

Az hegyesszöghöz viszonyított hányadosnak legyen neve: hegyesszög szinusza, jele:

Az hegyesszöghöz viszonyított hányadosnak legyen neve: hegyesszög koszinusza, jele:

Az hegyesszöghöz viszonyított hányadosnak legyen neve: hegyesszög tangense, jele:

Az hegyesszöghöz viszonyított hányadosnak legyen neve: hegyesszög kotangense, jele:

Most vegyük alapul a függőleges oldal végpontjában lévő béta hegyesszöget, ekkor a 4 nevezetes oldalarány származtatásai, elnevezései és jelölései a következőképp alakulnak:

A hegyesszöghöz viszonyított hányadosnak legyen neve: hegyesszög szinusza, jele:

A hegyesszöghöz viszonyított hányadosnak legyen neve: hegyesszög koszinusza, jele:

A hegyesszöghöz viszonyított hányadosnak legyen neve: hegyesszög tangense, jele:

A hegyesszöghöz viszonyított hányadosnak legyen neve: hegyesszög kotangense, jele:

Észrevételek: (1) már most érdemes észrevenni, hogy a tangens és kotangens szögfüggvények származtatásaikból következően egymás reciprokai;

(2)ami az alfa hegyesszögnek szinusza az a béta hegyesszögnek koszinusza;

(3)ami az alfa hegyesszögnek tangense, az a béta hegyesszögnek kotangense;

(4)ami az alfa hegyesszögnek koszinusza az a béta hegyesszögnek szinusza;

(5)ami az alfa hegyesszögnek kotangense, az a béta hegyesszögnek tangense;

Ezeket a kapcsolatokat, amikor felhasználjuk, hogy a derékszögű háromszög hegyesszögei egymás pótszögei (tehát összegük 90fok), a későbbiekben is kihasználjuk majd.

1.Feladat: Legyenek adottak egy derékszögű háromszögnek egyik befogója és átfogója: ; 6 dm. Írja fel a hegyesszögek szögfüggvényértékeinek hányadosait!

Mivel így befogó és 6dm az átfogó. Elsőként Pitagorasz tételének felhasználásával határozzuk meg a háromszög harmadik oldalát, amelyre előbb határozatlanként, hivatkozzunk x-el.

Mivel így jelöléseink legyenek ekkor

A hegyesszögek szögfüggvényértékei számológéppel meghatározhatók. Ezek az értékek minimális értékkel változnak, tehát ezeket az értékeket megállapodás szerint minden esetben (legalább) 4 tizedes jegy pontossággal rögzítjük és használjuk. (Megjegyzés: innen a függvénytáblázat elnevezése, NÉGYJEGYŰ fgv-táblázat.)

Ezeket az értékeket a továbbhaladás előtt mindenképp ellenőrizni szükséges saját számológéppel!!!

Amennyiben nem ugyanezeket az értékeket kapod, az azt jelenti, valamely beállítás nincs alapállapotban.

Üzemmód tekintetében DAL-os (előbb a művelet aztán az érték); illetve kevésbé DAL-os (előbb az érték aztán a művelet) számológép létezik; a számítógép beépített számológépét előbb tudományos nézetbe állítva egy kevésbé DAL-os rendszerű számológépet használhatunk.

Megjegyzés: abban az esetben, ha a megadott szög nem fok, hanem radián mértékegységben adott, akkor az egyik lehetőség, ha átállítjuk számológépünket radián mértékegységre (nem javasolt), a másik lehetőség, ha a radiánben megadott szögértéket visszaváltjuk fokba.

2.Feladat: Adjuk meg a következő szögfüggvény értékeket legalább 4 tizedes jegy pontossággal!

A szögfüggvény értékekkel történő számítások másik alapvető típusa, ha a pontos érték adott és abból kell a szögértéket visszaszámolnunk. Ezeket az értékeket a továbbhaladás előtt mindenképp ellenőrizz saját számítógépeden!!!

3.Feladat: Határozzuk meg a hegyesszöget, ha adottak a szögfüggvények pontos értékei!

4.Feladat: Határozzuk meg a hegyesszöget, ha adottak a szögfüggvények pontos értékei!

a)

Megjegyzés: a tetszőleges n-edik gyökvonás általában valamely gombhoz második funkcióként kerül hozzárendelésre, így a számológép bal felső sarkában lévő„2nDf” vagy „INV” vagy „SHIFT” feliratú gomb és ezután amely vagy

feliratú gomb formájában kell keresni.

b)

c)

Megjegyzés: Az ilyen alakban megadott pontos érték esetén egy további lehetőség (felhasználva a reciprok kapcsolatot), ha az eleve megadott tört reciprokára szimplán tangenses visszakeresést végzünk,

Figyelem! A pi ebben az esetben a 3,14159265358979 valós számot jelenti, amelyet a pontosság kedvéért érdemes a beépített értékkel használni, ezt álalában az „EXP” feliratú gombhoz rendeli hozzá második funkcióként, tehát előbb a számológép bal felső sarkában lévő„2nDf” vagy „INV” vagy „SHIFT” feliratú gomb aztán az „EXP”.

5.Feladat: Legyen adott egy derékszögű háromszög 18,2cm hosszú átfogója és egyik hegyesszöge 44fok. Határozza meg a háromszög kerületét, területét, beírható körének sugarát valamint átfogóhoz tartozó magasságát!

Vegyünk fel egy derékszögű háromszöget, a megállapodott jelölésekkel és mivel a feladat szövege nem írta elő, hogy melyik hegyesszög adott, így az egyszerűség kedvéért rendeljük hozzá a vízszintes befogó jobb oldali végpontjában lévő alfa betűjelű szöghöz. Mivel oldal és szög ismeretében kell további oldalakat meghatároznunk, így szögfüggvényeket alkalmazunk.

Megjegyzés: természetesen Pitagorasz tétele is alkalmazható lett volna, amint az „a” befogót meghatároztuk.

K=a+b+c=12,64+13,09+18,2=43,93476671cm

Megjegyzések: (1) az alkalmazott területképlet kizárólag derékszögű háromszög esetén alkalmazható;

(2)a kapott érték a tényleges pontos érték, amelyet akkor kaphatunk értékként, ha eleve pontos értékekkel alkalmazzuk azt, tehát ténylegesen:

s=K/2=43,93/2=21,96738335cm

6.Feladat: Legyen adott egy derékszögű háromszög 18,2cm hosszú befogója és egyik hegyesszöge 44fok. Határozza meg a háromszög kerületét, területét!

Mivel a feladat szövege határozatlan, hogy melyik befogót ismerjük, így rendeljük a függőleges, a betűjelű befogóhoz. Továbbá a feladat arról sem tesz említést, melyik hegyesszög ismert (szögfüggvények esetén jelentős információ, hogy az ismert befogóhoz képest szemközti vagy melletti a megadott hegyesszög) így esetvizsgálattal számoljuk ki mindkét, a feltételeknek eleget tevő derékszögű háromszög esetén.

1.eset: rendeljük a vízszintes befogó jobb oldali végpontjában lévő alfa betűjelű szöghöz.

K=a+b+c=18,2+18,85+26,2=63,25cm

2.eset: rendeljük a vízszintes befogóval szemközti béta betűjelű szöghöz.

Ekkor a vízszintes befogó jobb oldali végpontjában lévő alfa betűjelű szög

K=a+b+c=18,2+17,58+25,3=61,08cm

7.Feladat: Legyen adott egy derékszögű háromszög két befogója 18,2cm és 22,5cm. Határozza meg a hegyesszögeket, az átfogót és a körülírható kör sugarát!

Rendeljük a megadott oldalhosszakat a függőleges a betűjelű befogóhoz 18,2cm és a vízszintes befogó b betűjelű legyen 22,5cm. Mivel oldalhossz ismeretében szeretnénk szöget számolni, szögfüggvényt kell használjunk.

8.Feladat: Legyen adott egy derékszögű háromszög egyik befogója 18,2cm és átfogója 22,5cm. Határozza meg a hegyesszögeket, a másik befogót és a beírható kör sugarát!

Rendeljük például a függőleges, a betűjelű befogóhoz a megadott 18,2cm-es oldalhosszt. Mivel oldalhosszak ismeretében szeretnénk hegyesszöget számolni, így szögfüggvényt használunk.

K=a+b+c=18,2+13,23+22,5=53,92913451cm

9.Feladat: Egy szabályos háromszög valamely magassága 12cm-rel rövidebb, mint az oldala. Határozza meg a háromszög kerületét, területét!

Vegyünk fel egy szabályos háromszöget, amelynek rajzoljuk be a vízszintes oldalához tartozó magasságát. Így az eredeti szabályos háromszöget felbontottuk két darab egybevágó derékszögű háromszögre. Válasszuk a kettő közül a jobb oldalit és vizsgáljuk a róla ismert információkat. A kapott derékszögű háromszög függőleges befogója az a betűjelű. A vízszintes befogója (b betűjelű), az eredeti szabályos háromszög oldalhosszának fele, hiszen a szabályos háromszög minden magasságvonala egyben oldalfelező merőleges is, szögfelező is, súlyvonal is. A kapott derékszögű háromszög átfogója, c betűjelű pedig az eredeti szabályos háromszög oldala és a feladat szövege alapján hivatkozhatunk a+12vel. A vízszintes befogó jobb oldali végpontjában lévő hegyesszög alfa=60fok, mivel a szabályos háromszög minden szöge 60fokos.

A másik hegyesszöge béta=180-alfa-gamma=180-60-90=30fok. Mivel oldalhossz és szög ismeretében szeretnénk további oldalhosszt számolni, így szögfüggvényt használunk.

K=3\*c=3\*89,57=268,7076581cm

10.Feladat: Egy egyenlő szárú háromszög szárai 24fokkal kisebb szöget zárnak be, mint az alapon fekvő szögei, az alap 12cm. Határozza meg a háromszög kerületét és területét!

Vegyünk fel egy egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja legyen vízszintes helyzetű, a szárak metszéspontja legyen A jelű, így itt legyen az szög, tehát az alapon fekvő csúcsok B; C jelűek, amelyeknél lesz a jelű szög.

A feladat szövege szerint, a szögekről a következő információk tárhatók fel:

Rajzoljuk be az alaphoz tartozó magasságát. Így az eredeti egyenlő szárú háromszöget felbontottuk két darab egybevágó derékszögű háromszögre. Válasszuk a kettő közül például a jobb oldalit és vizsgáljuk a róla ismert információkat. A kapott derékszögű háromszög függőleges befogója az a betűjelű. A vízszintes befogója (b betűjelű), az eredeti egyenlő szárú háromszög alapjának fele, vagyis 6cm. A kapott derékszögű háromszög átfogója, c betűjelű pedig az eredeti egyenlő szárú háromszög szára. A vízszintes befogó jobb oldali végpontjában lévő hegyesszög .

A másik hegyesszöge . Mivel oldalhossz és szög ismeretében szeretnénk további oldalhosszt számolni, így szögfüggvényt használunk.

Esetünkben az „a” oldal jelöli az alaphoz tartozó magasságot.

Esetünkben a „c” betűjelű oldal a szárhossz.

K=12+2\*16,02=44,03360595cm

11.Feladat: Egy egyenlő szárú háromszög két belső szögének aránya 7:10 és rövidebb oldala 10cm. Határozza meg kerületét és területét!

Mivel a feladat szövege nem mondja, hogy a súlyok közül melyik ismétlődik, ezért esetvizsgálat szükséges.

1.eset: Legyen a belső szögek aránya 7:7:10 ekkor így

Ezek alapján tehát így az egyenlő szárú háromszög szárai ismertek. Rajzoljuk be az alaphoz tartozó magasságot, amely két darab egybevágó derékszögű háromszögre bontja az egyenlő szárú háromszöget. Válasszuk például a jobb oldalit, amely derékszögű háromszög átfogója és a vízszintes befogón lévő hegyesszög ismert, ekkor oldal és szög ismeretében kell további oldalakat meghatározzunk, tehát szögfüggvényt alkalmazunk:

Az alkalmazott jelölésekkel ebben a derékszögű háromszögben az „a” jelű függőleges befogó az eredeti egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága.

Az alkalmazott jelölésekkel ebben a derékszögű háromszögben a „b” jelű vízszintes befogó az eredeti egyenlő szárú háromszög alapjának fele, tehát annak alapja 2\*6,08761429=12,17522858cm

K=12,18+2\*10=32,17522858cm

2.eset: Legyen a belső szögek aránya 7:10:10 ekkor így

Ezek alapján tehát így az egyenlő szárú háromszög alapja ismert. Rajzoljuk be az alaphoz tartozó magasságot, amely két darab egybevágó derékszögű háromszögre bontja az egyenlő szárú háromszöget. Válasszuk például a jobb oldalit, amely derékszögű háromszög vízszintes befogója az eredeti egyenlő szárú háromszög alapjának fele, tehát és a vízszintes befogón lévő hegyesszög ismert, ekkor oldal és szög ismeretében kell további oldalakat meghatározzunk, tehát szögfüggvényt alkalmazunk:

Az alkalmazott jelölésekkel ebben a derékszögű háromszögben az „a” jelű függőleges befogó az eredeti egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága.

Az alkalmazott jelölésekkel ebben a derékszögű háromszögben a „c” jelű átfogó az eredeti egyenlő szárú háromszög szára.

K=10+2\*12,62=35,24743968cm

12.Feladat: Egy egyenlő szárú háromszög oldalainak aránya 5:8 kerülete 126cm. Határozza meg a szögeit és magasságait!

Mivel a feladat szövege nem teszi egyértelművé, hogy melyik súllyal rendelkező oldal ismétlődik, ezért esetvizsgálat lesz.

1.eset: Legyenek az oldalak aránya 5:5:8 ekkor a=8x illetve b=5x ekkor

8x+5x+5x=18x=126

x=7cm

Vagyis a háromszög alapja (vízszintes oldala) 8\*7=56cm illetve szárai 5\*7=35cm.

Rajzoljuk be az alaphoz tartozó magasságát. Így az eredeti egyenlő szárú háromszöget felbontottuk két darab egybevágó derékszögű háromszögre. Válasszuk a kettő közül például a jobb oldalit és vizsgáljuk a róla ismert információkat.

A kapott derékszögű háromszög függőleges befogója az „a” betűjelű az eredeti egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága. A vízszintes befogója („b” betűjelű), az eredeti egyenlő szárú háromszög alapjának fele, vagyis 28cm.

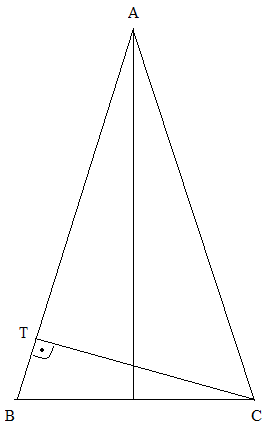
A kapott derékszögű háromszög átfogója „c” betűjelű pedig az eredeti egyenlő szárú háromszög szára vagyis 35cm. Mivel oldalhossz és szög ismeretében szeretnénk további oldalhosszt számolni, így szögfüggvényt használunk.

Esetünkben ez az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei, így a szárak által bezárt szög

Ugyanabban a derékszögű háromszögben

Az alkalmazott jelölések értelmében ez az eredeti egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságának hossza.

A szárakhoz tartozó magasság meghatározása történhet terület-képlettel, de inkább alkalmazzunk szögfüggvényt, ehhez:



használjuk az ábrán megjelenő CBT derékszögű háromszöget, amelynek B csúcsánál lévő szöge 36,87fokos illetve az átfogója 56cm, vagyis a keresett TC befogó (amely az eredeti egyenlő szárú háromszög szárhoz tartozó magassága)

2.eset: Legyenek az oldalak aránya 5:8:8 ekkor a=5x illetve b=8x ekkor

5x+8x+8x=21x=126

x=6cm

Vagyis a háromszög alapja (vízszintes oldala) 5\*6=30cm illetve szárai 8\*6=48cm.

Rajzoljuk be az alaphoz tartozó magasságát. Így az eredeti egyenlő szárú háromszöget felbontottuk két darab egybevágó derékszögű háromszögre. Válasszuk a kettő közül például a jobb oldalit és vizsgáljuk a róla ismert információkat.

A kapott derékszögű háromszög függőleges befogója az „a” betűjelű az eredeti egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága. A vízszintes befogója („b” betűjelű), az eredeti egyenlő szárú háromszög alapjának fele, vagyis 15cm.

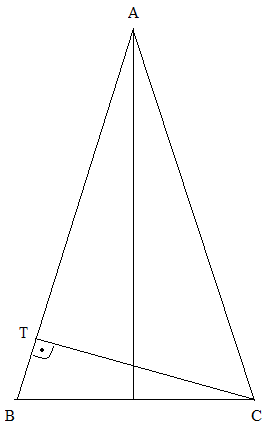
A kapott derékszögű háromszög átfogója „c” betűjelű pedig az eredeti egyenlő szárú háromszög szára vagyis 48cm. Mivel oldalhossz és szög ismeretében szeretnénk további oldalhosszt számolni, így szögfüggvényt használunk.

Esetünkben ez az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei, így a szárak által bezárt szög

Ugyanabban a derékszögű háromszögben

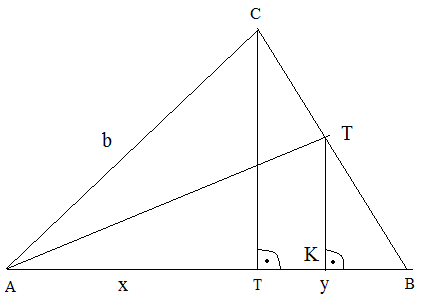
Az alkalmazott jelölések értelmében ez az eredeti egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságának hossza.

A szárakhoz tartozó magasság meghatározása történhet terület-képlettel, de inkább alkalmazzunk szögfüggvényt, ehhez:



használjuk az ábrán megjelenő CBT derékszögű háromszöget, amelynek B csúcsánál lévő szöge 36,87fokos illetve az átfogója 56cm, vagyis a keresett TC befogó (amely az eredeti egyenlő szárú háromszög szárhoz tartozó magassága)

13.Feladat: Egy háromszög valamely magassága 12cm, az adott oldalon fekvő szögek 52fok és 70fok. Határozza meg a háromszög oldalait és az A csúcsból induló belső szögfelező háromszögbe eső részének hosszát!



Vegyünk fel egy háromszöget úgy, hogy legyen egy vízszintes oldala és ehhez az oldalhoz rajzoljuk be a hozzá tartozó magasságot. Ettől a magasságtól balra legyen az A csúcs és itt az alfa=52fok. A berajzolt magasságvonaltól jobbra legyen a B csúcs és itt béta=70fok. A háromszög kerületének meghatározásához meg kell határozzuk az összes oldalhosszt, így a bal és a jobb oldali háromszögben is részszámításokat kell végezzünk szögfügvényekkel, hiszen oldal és szög ismeretében számolunk további oldalt. A vízszintes oldalhoz tartozó magasság ezt az oldalt 2 részre osztja, ezekre hivatkozzunk x és y betűjelekkel.

Foglalkozzunk először a bal oldali derékszögű háromszöggel. Ebben a vízszintes befogó legyen „x” betűjelű, a függőleges befogó a megadott magasság és átfogója, az eredeti háromszögben B csúccsal szemközti oldal betűjele „b”.

Foglalkozzunk most a jobb oldali derékszögű háromszöggel. Ebben a vízszintes befogó legyen „y” betűjelű, a függőleges befogó a megadott magasság és átfogója, az eredeti háromszögben A csúccsal szemközti oldal betűjele „a”.

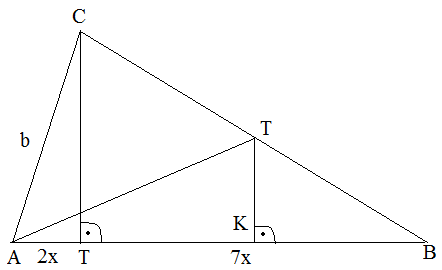
A háromszög harmadik oldala: c=x+y=9,38+4,37=13,74307033cm

Egészítsük ki ábránkat az A csúcsból induló belső szögfelező berajzolásával. Ennek a szemközti oldalon legyen végpontja a „T” pontban. Ekkor az ATB általános háromszögnek a szögfelező tétellel meghatározhatjuk TB oldalát:

A szögfüggvény alkalmazásához vezessük vissza derékszögűre, amit a legkönnyebben úgy tehetünk meg, ha a T csúcsból merőlegest állítunk az AB oldalra. Ekkor TKB derékszögű háromszögben a B csúcsnál lévő 70fokos hegyesszög és az átfogóként megjelenő TB oldal ismeretében TK meghatározható:

Most térjünk át az ATK derékszögű háromszögre, amelyben az A csúcsnál lévő hegyesszög 26fokos (mert ez egy belső szögfelező egyenes) illetve a vele szemközti függőleges helyzetű befogó TK, vagyis:

14.Feladat: Egy háromszög valamely magassága 12cm, ez a magasság a hozzá tartozó 18cm-es oldalt 2:7 arányú részekre osztja. Határozza meg a háromszög szögeit, oldalait és határozzuk meg az „A” csúcsból induló súlyvonal háromszögbe eső részének hosszát, illetve határozza meg, hogy ez a súlyvonal mekkora szöget zár be a háromszög oldalaival!



Vegyünk fel egy háromszöget úgy, hogy annak legyen vízszintes oldala és ehhez a 18cm-es oldalhoz tartozó magasság legyen a megadott 12cm. A magasság az alapot a megadott arányban osztva, azt egyenletbe foglalhatjuk

2x+7x=9x=18

x=2cm

Legyen 2\*x=2\*2=4cm-es rész a magasságtól balra és 7\*x=7\*2=14cm-es rész a magasságtól jobbra.

Foglalkozzunk először a bal oldali derékszögű háromszöggel. Ebben a vízszintes befogó 4cm, a függőleges befogó a megadott magasság és átfogója, mert az eredeti háromszögben B csúccsal szemközti oldal betűjele b.

Foglalkozzunk most a jobb oldali derékszögű háromszöggel. Ebben a vízszintes befogó 14cm, a függőleges befogó 12cm, az átfogó amely A csúccsal szemközti a betűjelű.

A háromszög harmadik szöge:

Egészítsük ki ábránkat az „A” csúcsból induló súlyvonalat, amely a szemközti oldalt a „T” pontban metszi, amely pont a BC oldal felezőpontja. A szögfüggvény alkalmazásához vezessük vissza derékszögű háromszögre, ezt úgy tehetjük meg a legegyszerűbben, ha merőlegest állítunk a T pontból az AB oldalra. Az így kapott TKB derékszögű háromszög TB átfogója az eredeti ABC háromszög „a”a oldalának fele vagyis TB=9,219544455cm illetve a „B” csúcsnál lévő szöge   
 ekkor

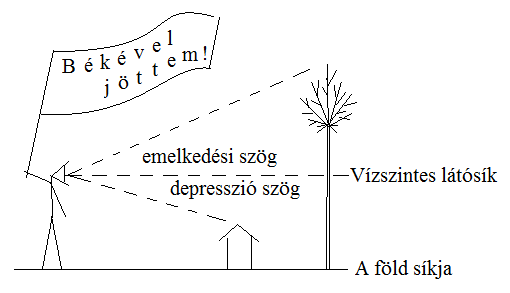
Térjünk át az ATK derékszögű háromszögre, amelyben a függőleges befogó TK=6cm, vízszintes befogó

AK=18-7=11cm. Vagyis Pitagorasz tételének alkalmazásával az AT átfogó (vagyis a súlyvonal háromszögbe eső része:

Ugyanebben az ATK derékszögű háromszögben határozzuk meg az A csúcsnál lévő, pl. betűjelű szöget:

Tehát az eredeti háromszög „A” csúcsából induló súlyvonal az AB oldallal 28,61fokos szöget zár be, ugyanezen súlyvonal az eredeti háromszög AC oldalával -os szöget zár be.

Elsőként három elnevezést tisztázzunk: a földfelszínt méreteiből adódóan tekintsük vízszintes helyzetűnek, ekkor ezen síkfelülettel párhuzamos síkot,vízszintes látósíknak nevezzük. Ehhez a vízszintes látósíkhoz viszonyítva, mindaz amely „fölötte” van, azt valamekkora emelkedési szögben; mindaz ami „alatta” van, azt valamekkora süllyedési/depresszió szögben látjuk. Megjegyzések: (1) egyes feladatok egyidejűleg említhetik a kettőt; (2) figyelni kell szemmagasságunkra.



15.Feladat: Egy szobor előtt állok, attól 8m távolságban. Milyen magas vagyok, ha a szobor talpazatát 12,31fokos depresszió szögben látom? (Válaszát mm pontossággal 3 tizedesre kerekítve adja meg!)

A magadott adatok elhelyezhetők egy olyan derékszögű háromszögben, amelynek vízszintes befogója 8m és azon lévő hegyesszöge 12,31fokos. A feladat ennek a derékszögű háromszögnek kérdezi függőleges befogóját, tehát:

16.Feladat: Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága 8dm, egyik hegyesszöge 38fok. Határozza meg a háromszög kerületét!

Legyen a megadott hegyesszög az „A” csúcsnál lévő alfa, ekkor az átfogóhoz tartozó magasság egy, az eredetihez hasonló háromszöget határoz meg, amelyben a derékszöggel szemközti oldalt (az átfogót) az eredeti derékszögű háromszög vízszintes befogóját érdemes számolni:

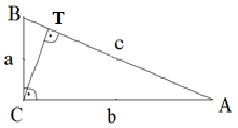
Innen visszatérve az eredeti derékszögű háromszögre:

Tehát a háromszög kerülete:

17.Feladat: Egy derékszögű háromszög valamely befogójának, átfogóra eső merőleges vetülete 8dm, hegyesszögeinek különbsége 22fok. Határozza meg a háromszög kerületét!

Ha a hegyesszögek különbsége 22fok, akkor az egyenletből és

1.eset: a megadott merőleges vetület az „a” oldalhoz tartozik:

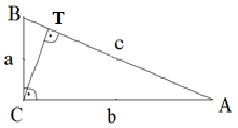


A CTB derékszögű háromszög C csúcsánál szög van, így:

Az ABC derékszögű háromszögben:

Tehát a háromszög kerülete:

2.eset: a megadott merőleges vetület a „b” oldalhoz tartozik:

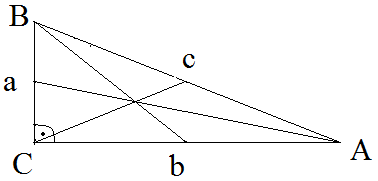


A CTA derékszögű háromszög A csúcsánál szög van, így:

Az ABC derékszögű háromszögben:

Tehát a háromszög kerülete:

18.Feladat: Egy derékszögű háromszög egyik befogójának és átfogójának összege 8dm, egyik hegyesszöge 34fok. Határozza meg a súlyvonalak befogókkal vett hajlásszögét!



1.eset: és ekkor

Az „A” csúcsból induló súlyvonal elhelyezhető egy olyan derékszögű háromszögben, amelynek függőleges befogója vízszintes befogója , így a vízszintes befogóval: amelyből -os és a függőleges befogóval -os szöget zár be.

A „B” csúcsból induló súlyvonal elhelyezhető egy olyan derékszögű háromszögben, amelynek vízszintes befogója függőleges befogója , így a vízszintes befogóval: amelyből -os és a függőleges befogóval -os szöget zár be.

Mivel a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonala egyben a körülírható kör sugara is, így az eredeti derékszögű háromszöget minden esetben két db egyenlő szárú háromszögre bontja, amely egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlők a derékszögű háromszög hegyesszögeivel, tehát az átfogóhoz tartozó súlyvonal a befogókkal ugyanúgy

és -os szöget zár be.

2.eset: és ekkor

Az „A” csúcsból induló súlyvonal elhelyezhető egy olyan derékszögű háromszögben, amelynek függőleges befogója vízszintes befogója , így a vízszintes befogóval: amelyből -os és a függőleges befogóval -os szöget zár be.

A „B” csúcsból induló súlyvonal elhelyezhető egy olyan derékszögű háromszögben, amelynek vízszintes befogója függőleges befogója , így a vízszintes befogóval: amelyből -os és a függőleges befogóval -os szöget zár be.

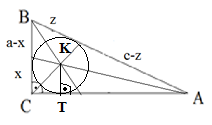
Mivel a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonala egyben a körülírható kör sugara is, így az eredeti derékszögű háromszöget minden esetben két db egyenlő szárú háromszögre bontja, amely egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlők a derékszögű háromszög hegyesszögeivel, tehát az átfogóhoz tartozó súlyvonal a befogókkal ugyanúgy

és -os szöget zár be.

19.Feladat: Egy derékszögű háromszög beírható körének sugara 8dm, hegyesszögeinek aránya 4:5. Határozza meg a háromszög kerületét!

Ha a háromszög belső szögeinek aránya 4:5 akkor: amelyből így

Használjuk ki, hogy a beírható kör minden háromszögben a belső szögfelezők által kerül meghatározásra:



Tehát az ATK derékszögű háromszögben ismert az „A” csúcsnál lévő -os szög és a szemközti befogó, ekkor:

Tehát amelyből

Az ABC derékszögű háromszögben:

Tehát

20.Feladat: Egy derékszögű háromszög valamely két külső szögének aránya 4:5, átfogója 8dm. Határozza meg a háromszög kerületét!

1.eset: ekkor innen tehát

Tehát

2.eset: ekkor innen tehát amely irreális érték.

3.eset: ekkor innen tehát

Ezek alapján ugyanazokat az oldalhosszakat kapjuk, mint az 1.esetben.

4.eset: ekkor innen tehát amely irreális érték.

5.eset: ekkor innen tehát

Tehát

6.eset: ekkor innen tehát

Ezek alapján ugyanazokat az oldalhosszakat kapjuk, mint a 4.esetben.

21.Feladat: Egy derékszögű háromszög valamely belső szöge szögfelezőjének háromszögbe eső szakasza 8dm hosszú és egyik hegyesszöge 38fokos. Határozza meg a súlyvonalak hosszát!

Legyen

1.eset:

Az „A” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „B” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „C” csúcsból induló súlyvonal:

2.eset:

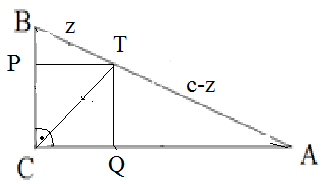
Az „A” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „B” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „C” csúcsból induló súlyvonal:

3.eset:

A „C” csúcsból induló belső szögfelező háromszögbe eső részének meghatározásához használjuk a következő ábrát:



Jelöljük a CQTP négyzet oldalát pl. „x” betűjellel, ekkor CT=8dm, így

Az ATQ derékszögű háromszögben:

Tehát az ABC derékszögű háromszög vízszintes befogója:

Az „A” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „B” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „C” csúcsból induló súlyvonal:

22.Feladat: Egy derékszögű háromszög valamely hegyesszögének 8dm-es szögfelezője 2dm és 3dm-es részekre osztja a szemközti befogót. Határozza meg a háromszög súlyvonalainak háromszögbe eső részeinek hosszát!

1.eset: legyen ekkor a szemközti oldal: és a derékszögű csúcsnál legyen a -es rész:

Áttérve az ABC derékszögű háromszögre

Az „A” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „B” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „C” csúcsból induló súlyvonal:

2.eset: legyen ekkor a szemközti oldal: és a derékszögű csúcsnál legyen a -es rész:

Áttérve az ABC derékszögű háromszögre

Az „A” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „B” csúcsból induló belső súlyvonal:

A „C” csúcsból induló súlyvonal:

További esetek vizsgálata szükségtelen, mert csak a betűjelek változnak az értékek nem.